1. (C) (i) tvrzení neplatí, jako protipříklad stačí zvolit

$$a_n = 0 \text{ a } b_n = (-1)^{n+1} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom $L=0$, ale $|b_n - L| = 1$ a tedy nemůže platit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ve skutečnosti ani neexistuje)

(ii) tvrzení neplatí, opět stačí zvolit $a_n = 0$ a $b_n = (-1)^{n+1}$.

Nechť $\{b_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z b_n.

Potom opět $|b_{n_k} - L| = 1$.

(iii) tvrzení platí. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

Potom:

protože $a_{2n} > b_{2n}$ máme $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = M$

obdobně $a_{2n-1} < b_{2n-1}$ a $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n-1} = M$.

Odtud $L = M$.

Používáme fakt z přednášky, že přechod k podposloupnosti zachovává limitu a také fakt, že

$$a_n \leq b_n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(který snadno dokážeme sporem)

2. (c)

(i) tvrzení neplatí: zvolme

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

potom $f = F'$ existuje na $(-2,7)$, ale f není spojitá na $(-2,7)$

(ii) tvrzení neplatí: můžeme zvolit jakoukoliv spojitou funkci na $(-2,7)$ (která tam tudíž musí mít primitivní funkci) ale nemá v nějakém bodě z $(-2,7)$ derivaci (např. $f(x) = |x|$)

(iii) tvrzení platí: nechť $\tilde{F}$ je primitivní funkce k f na $(-2,7)$ (která existuje podle předpokladů). Pak stačí položit $F = \tilde{F}|_{(-1,5)}$ a F je primitivní funkce k f na $(-1,5)$ (přímo z definice)

(iv) tvrzení platí: nechť F je PF k f na $(-2,7)$

a G je PF k f na $(2,10)$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$F(5) = G(5)$ (jinak přičteme vhodnou konstantu).

Položme
$$H(x) = \begin{cases} F(x) & x \in (-2,5) \\ G(x) & x \in [5,10). \end{cases}$$

Zjevně $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (-2,10) \setminus \{5\}$.

Navíc však platí $H'_-(5) = F'(5) = f(5)$

a $H'_+(5) = G'(5) = f(5)$

Tedy $H'(5) = f(5)$ a $H' = f$ na $(-2,10)$.

(v) tvrzení neplatí: stačí zvolit $f(x) = \frac{1}{x-7}$ $x \in (-2,10)$.

3. (a) (i) tvrzení neplatí, stačí zvolit $f(x) = |x-1|$

1. (a) (i) tvrzení neplatí, stačí zvolit $f(x) = |x-1|$

(ii) tvrzení neplatí, stačí zvolit $f(x) = |x-1|$

(iii) tvrzení neplatí, stačí zvolit $f(x) = |x-1|$

(iv) tvrzení neplatí, stačí zvolit $f(x) = (x-1)^2$

(v) tvrzení platí!. Pokud by platilo $f'_+(1) < 0$

tj. $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = c < 0$, pak by existovalo $\delta > 0$, že $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} < \frac{c}{2}$ $x \in (1, 1+\delta)$.

To by ale implikovalo

$$f(x) - f(1) < \frac{c}{2}(x-1) < 0, \quad x \in (1, 1+\delta),$$

což je ve sporu s předpokladem, že 1 je bodem lokálního minima f.